Correction Feuille Exercice 22

Étudier la nature et calculer la valeur d'une intégrale généralisée.

Exercice 12

Étudier la nature des intégrales suivantes et donner leurs valeurs le cas échéant :

1. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}}$ est une intégrale de Riemann divergente.
2. La fonction $t \to \dfrac{\ln(t)}{t}$ est continue sur $[e;+\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues ($t > 0$). Soit $x > e$, on calcule

$$\begin{aligned}\int_e^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t} dt &= \left[\frac{1}{2}\ln(t)^2\right]_e^x \\ &= \frac{1}{2}\ln(x)^2 - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\ln(x)^2 - \frac{1}{2} = +\infty$.

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_e^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t}\, dt \text{ est donc divergente.}}$$

3. La fonction $t \to t^2e^{-t}$ est continue sur $[0;+\infty[$ en tant que produit et composée de fonctions continues. Soit $x > 0$, on calcule $\displaystyle\int_0^x t^2e^{-t}\, dt$ à l'aide d'une intégration par parties. On utilise les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, $u = t^2, u' = 2t, v' = e^{-t}, v = -e^{-t}$

$$\begin{aligned}\int_0^x t^2e^{-t}dt &= [-t^2e^{-t}]_0^x - \int_0^x -2te^{-t}dt \\ &= -x^2e^{-x} + 2\int_0^x te^{-t}dt\end{aligned}$$

On calcule alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^x te^{-t}dt$ à l'aide d'une intégration par partie. En effet, en utilisant les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, $u = t, u' = t, v' = e^{-t}, v = -e^{-t}$:

$$\begin{aligned}\int_0^x te^{-t}dt &= [-te^{-t}]_0^x - \int_0^x -e^{-t}dt \\ &= -xe^{-x} + [-e^{-t}]_0^x \\ &= -xe^{-x} - e^{-x} + 1\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}\int_0^x t^2e^{-t}dt &= -x^2e^{-x} + 2\left(-xe^{-x} - e^{-x} + 1\right) \\ &= -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + 2\end{aligned}$$

Or par croissance comparée

$$\lim_{x\to+\infty} -x^2e^{-x} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} -2xe^{-x} = 0$$

Ainsi

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^{+\infty} t^2e^{-t}\,dt \text{ est convergente et } \int_0^{+\infty} t^2e^{-t}\,dt = 2}$$

Exercice 13
Soit f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right)$.

1. La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que quotient, somme et composée de fonctions dérivable sur $]0,+\infty[$

$$\begin{aligned}\forall x \in]0;+\infty[, \quad f'(x) &= \frac{\dfrac{e^x(e^x+1)-e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^2}}{\dfrac{e^x-1}{e^x+1}}\\ &= \frac{(e^{2x}+e^x-e^{2x}+e^x)(e^x+1)}{(e^x+1)^2(e^x-1)}\\ &= \frac{2e^x}{(e^x+1)(e^x-1)}\end{aligned}$$

On a donc

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[, \quad f'(x) = \frac{2e^x}{e^{2x}-1} = \frac{2e^x}{e^x(e^x-e^{-x})} = \frac{2}{e^x-e^{-x}}}$$

2. La fonction $t \to \dfrac{1}{e^t-e^{-t}}$ est continue sur $[1,+\infty[$. Soit $X>1$, On calcule

$$\begin{aligned}\int_1^X \frac{1}{e^t-e^{-t}}dt &= \left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)\right]_1^X\\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^X-1}{e^X+1}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{e-1}{e+1}\right)\end{aligned}$$

Or

$$\lim_{X\to+\infty}\frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^X-1}{e^X+1}\right) = \lim_{X\to+\infty}\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-e^{-X}}{1+e^{-X}}\right) = 0$$

Donc l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{e^t-e^{-t}}dt$ est convergente et

$$\boxed{\int_1^{+\infty}\frac{1}{e^t-e^{-t}}dt = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{e-1}{e+1}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{e+1}{e-1}\right)}$$

Exercice 14
La fonction $t \to t^3e^{-t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$. Soit $X>0$, on calcule $\displaystyle\int_0^X t^3e^{-t^2}dt$ par intégration par partie. On pose

$$\begin{array}{ll} u(t) = t^2 & v'(t) = te^{-t^2}\\ u'(x) = 2t & v(x) = -\frac{1}{2}e^{-t^2}\end{array}$$

u et v sont deux fonctions de classe C^1 donc

$$\begin{aligned}\int_0^X t^3e^{-t^2}dt &= \left[-\frac{t^2}{2}e^{-t^2}\right]_0^X - \int_0^X -\frac{2t}{2}e^{-t^2}dt\\ &= -\frac{X^2}{2}e^{-X^2} - 0 - \frac{1}{2}\int_0^X -2te^{-t^2}dt\\ &= -\frac{X^2}{2}e^{-X^2} - \frac{1}{2}\left[e^{-t^2}\right]_0^X\\ &= -\frac{X^2}{2}e^{-X^2} - \frac{e^{-X^2}}{2} + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Or
$$\lim_{X\to+\infty} -\frac{X^2}{2}e^{-X^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{2}e^{x} = 0 \quad \text{(par croissance comparée)}$$
et
$$\lim_{X\to+\infty} e^{-X^2} = 0.$$
Donc l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} t^3e^{-t^2}dt$ est convergente et
$$\boxed{\int_0^{+\infty} t^3e^{-t^2}dt = \frac{1}{2}}$$

Étudier la nature et calculer la valeur d'une double intégrale généralisée.

Exercice 15

1. La fonction $t \to \dfrac{t}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ $(1+t^2 \neq 0)$.
   On étudie $\int_0^{+\infty} \dfrac{t}{1+t^2}dt$. Soit $x>0$, on calcule
   $$\begin{aligned}\int_0^x \frac{t}{1+t^2}dt &= \left[\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_0^x \\ &= \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\end{aligned}$$
   Or $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) = +\infty$. Ainsi, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \dfrac{t}{1+t^2}dt$ est divergente et donc
   $$\boxed{\text{l'intégrale } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{1+t^2}dt}$$
2. La fonction $t \to \dfrac{e^{2t}}{(e^{2t}+1)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient et composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
   — On étudie $\int_0^{+\infty} \dfrac{e^{2t}}{(e^{2t}+1)^2}dt$. Soit $x>0$ et on calcule
   $$\begin{aligned}\int_0^x \frac{e^{2t}}{(e^{2t}+1)^2}dt &= \left[\frac{-1}{2}\times\frac{1}{e^{2t}+1}\right]_0^x \\ &= \frac{-1}{2(e^{2x}+1)} + \frac{1}{4}\end{aligned}$$
   Or $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{-1}{2(e^{2x}+1)} = 0$. Ainsi l'intégrale $\int_0^{+\infty} \dfrac{e^{2t}}{(e^{2t}+1)^2}dt$ est convergente et
   $$\int_0^{+\infty} \frac{e^{2t}}{(e^{2t}+1)^2}dt = \frac{1}{4}$$
   — On étudie $\int_{-\infty}^{0} \dfrac{e^{2t}}{(e^{2t}+1)^2}dt$. Soit $x<0$ et on calcule
   $$\begin{aligned}\int_x^0 \frac{e^{2t}}{(e^{2t}+1)^2}dt &= \left[\frac{-1}{2}\times\frac{1}{e^{2t}+1}\right]_x^0 \\ &= \frac{-1}{4} + \frac{1}{2(e^{2x}+1)}\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{2(e^{2x}+1)} = \dfrac{1}{2}$. Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{2t}}{(e^{2t}+1)^2}dt$ est convergente et

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{2t}}{(e^{2t}+1)^2}dt = \frac{1}{4}$$

— L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2t}}{(e^{2t}+1)^2}dt$ est donc convergente et

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2t}}{(e^{2t}+1)^2}dt = \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{2t}}{(e^{2t}+1)^2}dt + \int_{0}^{+\infty} \frac{e^{2t}}{(e^{2t}+1)^2}dt = \frac{1}{2}}$$

Exercice 16 (*)

1. La fonction $t \to \dfrac{te^t}{(1+e^t)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient et composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ ($(1+e^t)^2 \neq 0$). Soit $x > 0$, on calcule à l'aide d'une intégration par parties en choisissant les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, $u = t, u' = 1, v' = \dfrac{e^t}{(1+e^t)^2}, v = -\dfrac{1}{1+e^t}$

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{te^t}{(1+e^t)^2}dt &= \left[-\frac{t}{1+e^t}\right]_0^x + \int_0^x \frac{1}{1+e^t}dt \\
&= -\frac{x}{1+e^x} + \int_0^x \frac{1+e^t-e^t}{1+e^t}dt \\
&= -\frac{x}{1+e^x} + \int_0^x 1 - \frac{e^t}{1+e^t}dt \\
&= -\frac{x}{1+e^x} + x - [\ln(1+e^t)]_0^x \\
&= -\frac{x}{1+e^x} + x - (\ln(1+e^x) - \ln(2)) \qquad = -\frac{x}{1+e^x} + x - \ln(e^x(1+e^{-x})) + \ln(2) \\
&= -\frac{x}{1+e^x} + x - x - \ln(1+e^{-x}) + \ln(2) \\
&= -\frac{x}{1+e^x} - \ln(1+e^{-x}) + \ln(2)
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} -\frac{x}{1+e^x} &= \lim_{x\to+\infty} -\frac{x}{e^x(1+e^{-x})} \\
&= 0 \quad \text{par croissance comparée.}
\end{aligned}$$

et

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(1+e^{-x}) = 0$$

$$\boxed{\text{Donc l'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{te^t}{(1+e^t)^2}\, dt \text{ converge et vaut } \ln(2)}$$

2. On montre que la fonction $f : t \to \frac{te^t}{(1+e^t)^2}$ est impaire. Elle est en effet définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout

$t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(-t) &= \frac{-te^{-t}}{(1+e^{-t})^2} \\ &= -\frac{t}{e^t\left(1+\dfrac{1}{e^t}\right)^2} \\ &= -\frac{t}{\dfrac{e^t}{(e^t)^2}(e^t+1)^2} \\ &= -\frac{te^t}{(e^t+1)^2} = -f(t) \end{aligned}$$

La fonction est donc impaire. Soit $x > 0$, on sait que

$$\int_{-x}^{0} \frac{te^t}{(e^t+1)^2} dt = -\int_0^x \frac{te^t}{(e^t+1)^2} dt$$

Ainsi, puisque l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{te^t}{(1+e^t)^2}\, dt$ est convergente, l'intégrale $\int_{-\infty}^{0} \frac{te^t}{(e^t+1)^2} dt$ est convergente et

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{te^t}{(e^t+1)^2} dt = -\ln(2)$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{te^t}{(1+e^t)^2}\, dt \text{ converge et } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{te^t}{(1+e^t)^2}\, dt = 0.}$$

Exercice 17 (**)
Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

1. On suppose que f est paire et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ converge.

   Soit $x > 0$. La fonction étant paire, on a

   $$\int_{-x}^{0} f(t)dt = \int_0^x f(t)dt$$

   Comme l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ converge, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)\, dt$ converge également et $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)dt = \int_0^{\infty} f(t)dt$. Donc

   $$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt \text{ converge et } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 2\int_0^{+\infty} f(t)\, dt.}$$

2. On suppose que f est impaire et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ converge.

   Soit $x > 0$. La fonction étant impaire, on a

   $$\int_{-x}^{0} f(t)dt = -\int_0^x f(t)dt$$

   Comme l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ converge, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)\, dt$ converge également et $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)dt = -\int_0^{\infty} f(t)dt$. Donc

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt \text{ converge et } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 0.}$$

Étudier la nature d'une intégrale généralisée par comparaison.

Exercice 18

1. On a

$$\begin{aligned}\frac{1}{t^2} - \frac{1}{1+t^2} &= \frac{1+t^2}{t^2(1+t^2)} - \frac{t^2}{t^2(1+t^2)} \\ &= \frac{1}{t^2(1+t^2)} > 0\end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{t^2}.}$$

2. L'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ est une intégrale de Riemann convergente. Les fonctions $t \to \frac{1}{1+t^2}$ et $t \to \frac{1}{t^2}$ étant positive et continues sur $[1, +\infty[$, par comparaison

$$\boxed{\text{l'intégrale impropre } \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt \text{ est convergente.}}$$

3. La fonction $t \to \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur $]-\infty, -1]$. Soit $X \geq 1$, on calcule, à l'aide du changement de variable $u = -t$,

$$\begin{aligned}\int_{-X}^{-1} \frac{1}{1+t^2}dt &= \int_X^1 \frac{1}{1+(-u)^2}(-du) \\ &= \int_1^X \frac{1}{1+u^2}du.\end{aligned}$$

Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+u^2}du$ est convergente d'après la question précédente. Donc

$$\boxed{\text{l'intégrale impropre } \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{1+t^2}dt \text{ est convergente.}}$$

4. La fonction $t \to \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur $[-1, 1]$. Donc l'intégrale $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+t^2}dt$ existe. En utilisant la relation de Chasles,

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt \text{ est convergente.}}$$

Exercice 19

Pour tout $a > 0$, et pour tout entier n, on note

$$I_n(a) = \int_0^a t^n e^{-t}dt \quad \text{et} \quad I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt$$

L'objectif du problème est de montrer que les intégrales I_n existent et calculer leur valeur.

1. La fonction $t \to e^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$ Donc, pour tout $a > 0$, on a

$$\begin{aligned} I_0(a) &= \int_0^a t^0 e^{-t} dt \\ &= [-e^{-t}]_0^a \end{aligned}$$

$$\boxed{I_0(a) = 1 - e^{-a}.}$$

On a donc $\lim\limits_{a \to +\infty} I_0(a) = \lim\limits_{a \to +\infty} I_0(a) = 1$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } I_0 \text{ existe et } I_0 = 1.}$$

2. Pour tout n la fonction $t \to t^n e^{-t}$ est continue sur $[0, a]$. On procède par intégration par parties

$$\begin{array}{rr} u(t) = t^{n+1} & v'(t) = e^{-t} \\ u'(t) = (n+1)t^n & v(t) = -e^{-t} \end{array}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$,

$$\begin{aligned} I_{n+1}(a) &= \int_0^a t^{n+1} e^{-t} dt \\ &= [-t^{n+1} e^{-t}]_0^a - \int_0^a -(n+1) t^n e^{-t} dt \\ &= -a^{n+1} e^{-a} - 0 + (n+1) \int_0^a t^n e^{-t} dt \end{aligned}$$

On en déduit

$$\boxed{I_{n+1}(a) = (n+1) I_n(a) - a^{n+1} e^{-a}.}$$

3. On montre par récurrence les propositions $\mathcal{P}_n$: "l'intégrale I_n converge."
   - $\mathcal{P}_0$ est vraie car I_0 converge (question 1)
   - On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un certain n. Dans ce cas $\lim\limits_{a \to +\infty} I_n(a) = I_n$ et $\lim\limits_{a \to +\infty} a^{n+1} e^{-a} = 0$ par croissance comparée. Donc

   $$\lim_{a \to +\infty} I_{n+1}(a) = (n+1) I_n - 0$$

   L'intégrale I_{n+1} est donc convergente.
4. On a de plus, $I_{n+1} = (n+1) I_n$. On en déduit que

$$\begin{aligned} I_n &= n I_{n-1} \\ &= n(n-1) I_{n-2} \\ &= n(n-1)(n-2) I_{n-3} \\ &.... \qquad\qquad = n! \end{aligned}$$

On a $\boxed{I_n = n!}$. On peut justifier proprement ce résultat par récurrence.

Sujets de concours

Exercice 20 (Edhec 2004)
Le but de cet exercice est de calculer $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t+t^n}dt$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $u_n=\int_0^1\frac{1}{1+t+t^n}dt$ et on a, en particulier, $u_0=\int_0^1\frac{1}{2+t}dt$

1. Pour tout n de $\mathbb{N}$, justifier lexistence de u_n.
2. Calculer u_0 et u_1.
3. (a) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
   (b) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\leq\ln(2)$
   (c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
4. (a) Pour tout n de $\mathbb{N}$, écrire $\ln(2)-u_n$ sous la forme dune intégrale.
   (b) En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\ln(2)-u_n\leq\frac{1}{n+1}$
   (c) Donner la limite de la suite (u_n)
5. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose $v_n=\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+t+t^n}dt$.
   (a) Justifier la convergence de l'intégrale définissant v_n.
   (b) Montrer que : $\forall n\geq 2,\ 0\leq v_n\leq\frac{1}{n-1}$
   (c) En déduire $\lim_{n\to+\infty}v_n$, puis donner la valeur de $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t+t^n}dt$.